数理解析研究所講究録
第 1624 巻 2009 年 11-16

数学教育におけるMathematicaの活用事例

甲南大学・知能情報学部　松本茂樹(Shigeki Matsumoto)
Faculty of Intelligence and Informatics,
Konan University

はじめに

本稿では、高等学校乃至大学初年級のレベルの数学を背景として、数式処理システムMathematicaを活用した発見的学習に供するような事例を２例紹介する。ひとつは「自然数の平方根の連分数展開の特徴付け」に関するものであり、今ひとつは「バーゼル問題（$\zeta(2)$　の求和）における松岡の公式の高次化」に関するものである。どちらも、学習者が数式処理システムを用いて計算を進めるなかで「数の法則性」を自ら探り当て、さらにその（法則性の）本質を突き止めるための一層の探索が数学の理解の深化に繋がるようなものをと思って作成した例であり、些かでも目的が達せられれば幸いである。

$\sqrt{\text{自然数}}$ の連分数展開について

■ **数式処理システムMathematicaによる計算例**

連分数展開を計算するMathematicaのコマンドContinuedFractionを使って具体的な２，３の数値例を眺めてみると、

ContinuedFraction$\left[\sqrt{23}\right]$

```
{4, {1, 3, 1, 8}}
```

ContinuedFraction$\left[\sqrt{117}\right]$

```
{10, {1, 4, 2, 4, 1, 20}}
```

ContinuedFraction$\left[\sqrt{5000}\right]$

```
{70, {1, 2, 2, 5, 4, 2, 1, 1,
  1, 5, 35, 5, 1, 1, 1, 2, 4, 5, 2, 2, 1, 140}}
```

のように、各循環節の部分に共通の特徴が認められる。すなわち、循環節の末尾の自然数は元の平方根の整数部分の丁度２倍であり、また、循環節から最後の要素を取り除いたものは“回文”である。

■ **連分数に関するルジャンドルの定理**

上記の二つの特徴は、１より大きい有理数の平方根（ただし、平方根は無理数であるものとする）の連分数展開を特徴付けるものであることが知られている（ルジャンドル）。

$$\mathbb{Q}_{>1} \Big\backslash (\mathbb{Q}_{>1})^2 \xrightarrow{\text{Legendre's "bijection"}} \mathbf{Z}_{\geq 1} \times \textbf{Palindromes}$$

ここで、Palindromesは、{1,2,4,11,4,2,1}のような回文的な自然数の有限列の全体を表すものとする。この対応はMathematicaの純関数で記述すれば以下の通りである。

```
{IntegerPart[√#], Most[ContinuedFraction[√#][[2]]]} &
```

なお、上記の対応が“全単射的”であるというのは以下のような重複性は度外視（無視）してのことである。

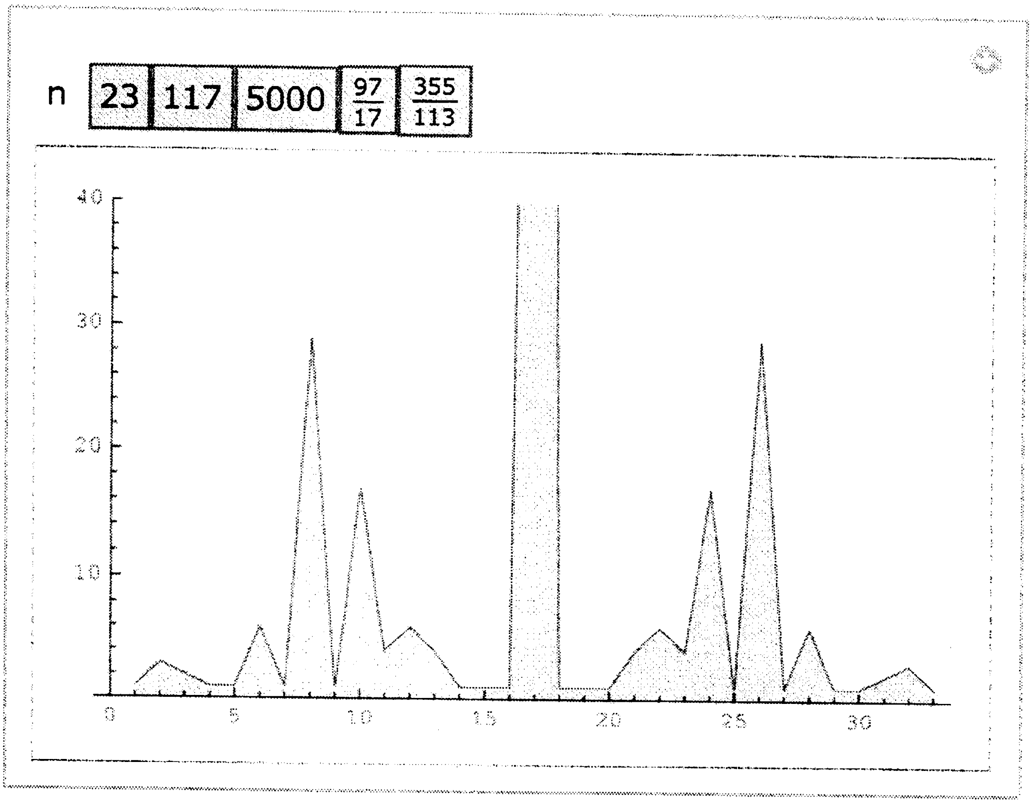
```
In[2]:= FromContinuedFraction[{1, {1, 2}}]
        FromContinuedFraction[{1, {1, 2, 1, 2}}]
        FromContinuedFraction[{1, {1, 2, 1, 2, 1, 2}}]

Out[2]= √3

Out[3]= √3

Out[4]= √3
```

■ **回文性(palindromic)の視覚化**

幾つかの無理数 $\sqrt{r}$ (r>1) について、連分数展開の循環節の含まれる“回文”を線対称図形として視覚化してみると以下のようである。

```
In[1]:= Manipulate[ListLinePlot[Most[ContinuedFraction[√n][[2]]],
          PlotRange → {0, 40}, Filling -> Axis],
        {n, {23, 117, 5000, 97/17, 355/113}}]
```

Out[1]=



■ $\sqrt{\text{自然数}}$ **の連分数展開の特徴付け（問題提起）**

ルジャンドルの対応

$$\mathbb{Q}_{>1} \setminus (\mathbb{Q}_{>1})^2 \xrightarrow{\text{Legendre's "bijection"}} \mathbb{Z}_{\geq 1} \times \text{Palindromes}$$

における $\mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus (\mathbb{Z}_{\geq 1})^2$ の像(image)がどのようなものであるのか、すなわち、如何なる自然数と回文の対が（ルジャンドル対応における）$\mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus (\mathbb{Z}_{\geq 1})^2$ の像に属するかを（実験数学的に）確定するということは興味深い問題であると思われる。

- **実験観察**

ルジャンドルの対応における $\mathbb{Z}_{\geq 1} \setminus \left(\mathbb{Z}_{\geq 1}\right)^2$ の像(image)をΛとおき、まずはΛの"切断面"を観察してみることにしよう。すなわち、自然数からなる回文的なリストpalindromeを固定して、対(n,palindrome)がΛに属するための自然数nの条件を求めてみることにしよう。

```
FromContinuedFraction[
    {n, Append[palindrome, 2 n]}]^2 ∈ Integers
```

数値例として、palindrome = {11, 5, 11}の場合についてのMathematicaの実験結果は次の通りである。

```
Select[Range[1000],
 FromContinuedFraction[{#, {11, 5, 11, 2 #}}]^2 ∈ Integers &]

{487}
```

```
Select[Range[5000],
  FromContinuedFraction[{#, {11, 5, 11, 2 #}}]^2 ∈
    Integers &] // Timing

{188.886, {487, 1114, 1741, 2368, 2995, 3622, 4249, 4876}}
```

```
RotateLeft[%[[2]]] - %[[2]] // Most

{627, 627, 627, 627, 627, 627, 627}
```

この数値計算結果では、（特定の一点における）Λの"切断面"が等差数列であることが観察されるが、このこと（"切断面"が等差数列であるということ）は別の回文で試してみても同様であることがわかる。

さて、palindrome = {11, 5, 11}の場合について少しく詳しく調べてみると、

```
FromContinuedFraction[{n, {11, 5, 11, 2 n}}]^2
```

がｎの式として

$$\text{In[9]:=}\quad \left(\text{x /. Solve}\left[x - n == \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{x-n}-11}-5}-11} - 2n,\ x\right]\right)^2 \text{ // Simplify}$$

$$\text{Out[9]=}\quad \left\{\frac{5}{627} + \frac{112\,n}{627} + n^2,\ \frac{5}{627} + \frac{112\,n}{627} + n^2\right\}$$

と求まるので、自然数 D, n に関する等式

$\sqrt{D}$ = FromContinuedFraction[{n, {11, 5, 11, 2 n}}]

は ディオファントス方程式 $D = n^2 + \frac{112n}{627} + \frac{5}{627}$ と同値であることがわかり、先述の「６２７を公差とする等差数列」はこの式から了解される。

■ **実験からの帰結**

種々の回文に対して実験を行うことにより、回文 palindrome = {p_1, p_2, p_3, p_4, ..., p_r}を固定する毎に、自然数 D, n に関する方程式

$\sqrt{D}$ == FromContinuedFraction[{n, Append[palindrome, 2 n]}]

$$\sqrt{D} = n + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{p_3 + \cfrac{1}{p_4 + \cfrac{1}{\ddots \, p_r + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{p_1 + \cdots}}}}}}}$$

は ディオファントス方程式 $D = n^2 + an + b$ （ここに、a,b は正の有理数）と同値であることが判明し、Λの等差断面性が了解される。実験を通じて法則性を発見しその真相を論証で突き止めていくなかで数学の理解を深めていくという学びのスタイルに向けた教材作りの参考になるかとも思い上記の事例を紹介させて頂いた。

バーゼル問題における松岡の公式の高次化

松岡芳男は 次の等式を用いて $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ を示した（１９６０年）。

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,x^2\,\mathrm{Cos}[x]^{2n}\,dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}[x]^{2n}\,dx}$$

松岡の方法の延長として、以下のような問題設定を行うことはそれほど不自然ではないであろう。

問題A　次の積分を計算し、それを用いて（非自明な）無限和の計算を行え。

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \,\mathrm{Cos}[x]^{2n}\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}[x]^{2n}\, dx}$$

解説　幾つかのｎの値に対して当該の定積分を（Mathematicaを活用して）計算することにより、次の等式の成立が予想され、厳密な証明をつけることができる。これにより、$\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{b}\frac{1}{(a\,b)^2}$が求まる。

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \,\mathrm{Cos}[x]^{2n}\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}[x]^{2n}\, dx} = \frac{\pi^4}{80} - \frac{\pi^2}{4}\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{a^2} + \frac{3}{2}\sum_{b=1}^{n}\sum_{a=1}^{b}\frac{1}{(a\,b)^2}$$

問題B　次の積分を計算し、それを用いて（非自明な）無限和の計算を行え。

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^6 \,\mathrm{Cos}[x]^{2n}\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}[x]^{2n}\, dx}$$

解説　幾つかのｎの値に対して当該の定積分を（Mathematicaを活用して）計算することにより、次の等式の成立が予想され、厳密な証明をつけることができる。これにより、$\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{b=1}^{c}\sum_{a=1}^{b}\frac{1}{(a\,b\,c)^2}$が求まる。

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^6 \,\mathrm{Cos}[x]^{2n}\, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Cos}[x]^{2n}\, dx} = \frac{1}{7}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{a^2} + \frac{3\times 5}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sum_{b=1}^{n}\sum_{a=1}^{b}\frac{1}{(a\,b)^2} - \frac{3^2\,5}{2^2}\sum_{c=1}^{n}\sum_{b=1}^{c}\sum_{a=1}^{b}\frac{1}{(a\,b\,c)^2}$$

上記の（ｘの偶数冪の）高次化は順次実行することが可能であり、MZV(multiple zeta values)に関連する無限和が（順次）求まるが、本稿では「探索と発見」のための（発見的学習に供する）教材の一例の紹介ということで、上述の問題設定を行うに留める。

Reference

[1] Andre Weil, Number theory, Birkhauser, 1983.

[2] Harold M. Stark, An Introduction to Number Theory, The MIT Press, 1978.

[3] 遠山啓, 初等整数論, 日本評論社, 1972.

[4] Jonathan Borwein, David Bailey, and Roland Girgensohn, Experimentation in Mathematics, A K Peters, 2004.